Séminaire Parisien d' Optimisation

17 juin 2021

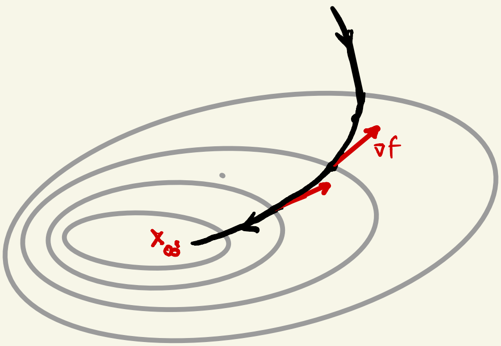
Courbes et suites auto-contractantes

Aris Daniilidis

Université du Chili

Motivation initiale :

étudier le comportement asymptotique du flot du gradient d'une fonction convexe



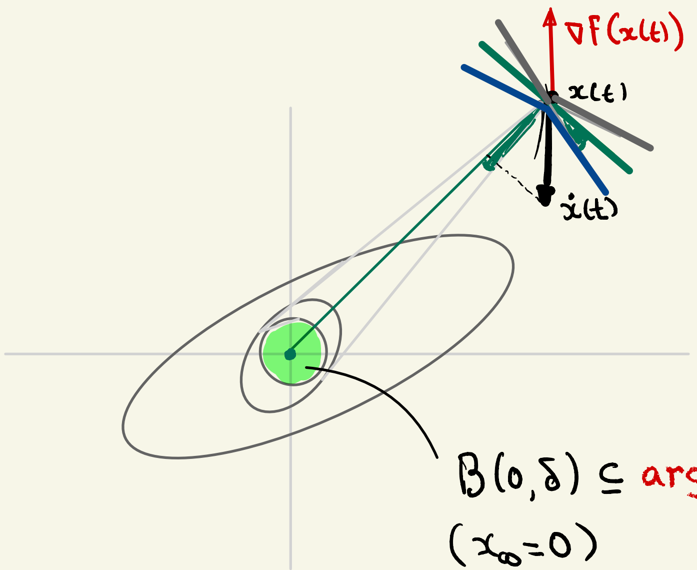
$$\dot{x}(t) = -\nabla f(x(t))$$
$$x(0) = x_0, \quad t \in [0, +\infty)$$

Si argmin$f \neq \emptyset$, alors $x(t) \to x_\infty$ et $\|x(t) - x_\infty\| \searrow$

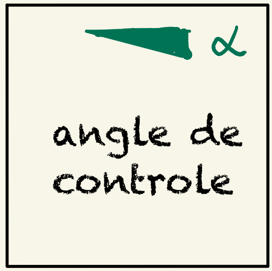
(lemme d'Opial)

Que peut-on dire sur la longueur $\displaystyle\int_0^\infty \|\dot{x}(t)\| dt$?

Cas facile : $\mathrm{int}(\mathrm{argmin} f) \neq \emptyset$



$\tan\alpha = \delta / \|x_0\|$



$$\|\dot{x}(t)^{rad}\| > \underbrace{\tan\alpha}_{cst} \, \|\dot{x}(t)^{hor}\|$$

$$\int_0^{+\infty} \|\dot{x}(t)^{rad}\| \, dt = \|\underbrace{x(0)}_{x_0} - \underbrace{x(\infty)}_{x_\infty \in \mathrm{argmin} f}\| \leq \|x_0\|.$$

Longueur finie (bornée par $\left(1 + \frac{1}{\tan\alpha}\right)\|x_0\|$)

Cas difficile : $\operatorname{argmin} f = \{0\}$ (singleton)

Problème : La composante radiale de la vitesse peut devenir arbitrairement petite par rapport à la composante horizontale

---

Remarque : si $\gamma(t)$ est une courbe du gradient d'une fonction convexe, alors pour tout $T>0$, la fonction

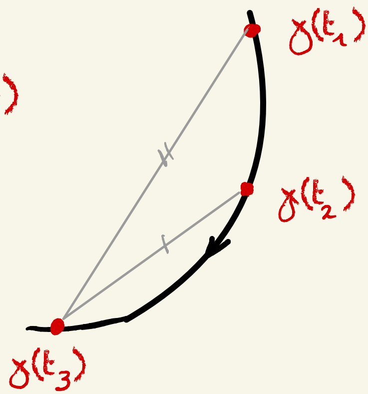
$$t \to \|\gamma(t)-\gamma(T)\|, \qquad t \in [0, T]$$

est décroissante.

Définition: Une courbe $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to X$ est dite auto-contractante si $\forall\, t_1 \le t_2 \le t_3$

$$d(\gamma(t_1),\gamma(t_3)) \geq d(\gamma(t_2),\gamma(t_3))$$

(X,d) espace métrique



Daniilidis, Ley, Sabourau (J. Math. Pures Appl. 2010)

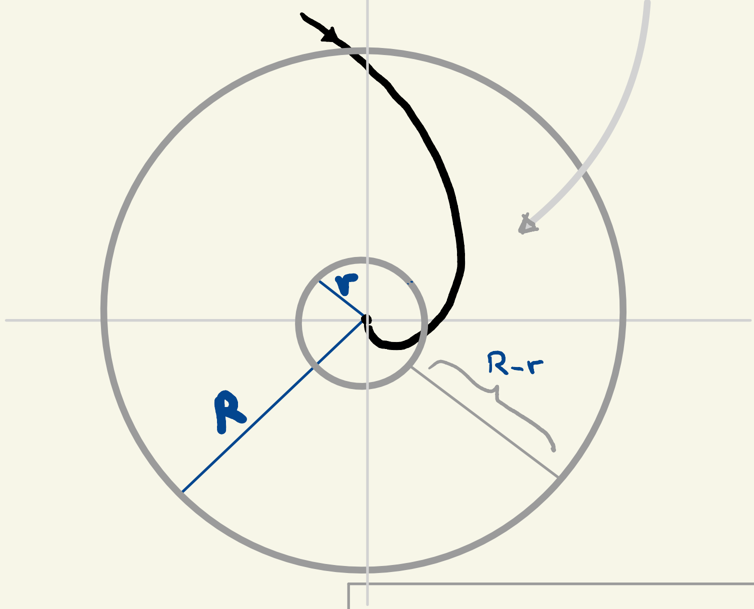
Si $X = (\mathbb{R}^2 \|\cdot\|_2)$, alors toute courbe continue **auto-contractante** est **rectifiable**.

Idée de la preuve :

- on peut supposer que la courbe γ est bornée, donc **convergente**

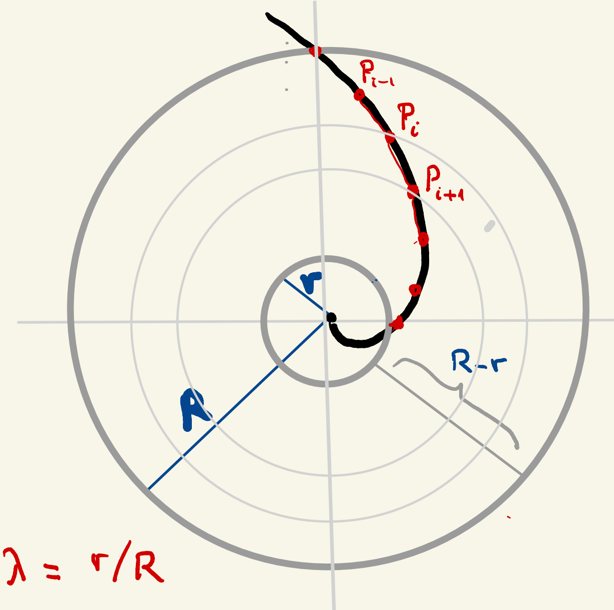
- on peut supposer que $\gamma = \lim_{t \to T_\infty} \gamma(t) = 0$.

- pour $0 < r < R$ on considère l'anneau $U(r,R)$.

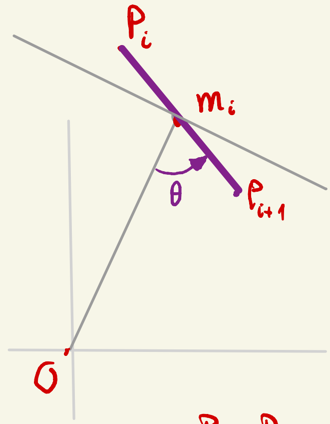


il suffit de montrer que $\boxed{|\gamma \cap U(r,R)| \leq cst \cdot (R-r)}$

$\{p_i\}_{i=0}^{N}$ partition polygonale de $\gamma \cap U(r,R)$



$\lambda = r/R$



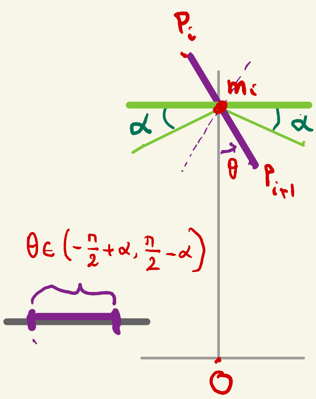
$$m_i = \frac{P_i + P_{i+1}}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Fixons α tal que $0 < \sin\alpha < \lambda < 1$

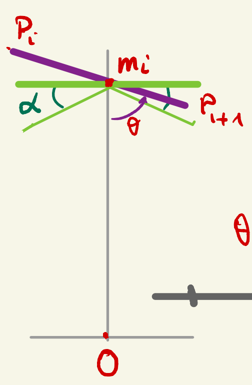
Classification des segments : $I_i = [p_i, p_{i+1}]$

Verticaux



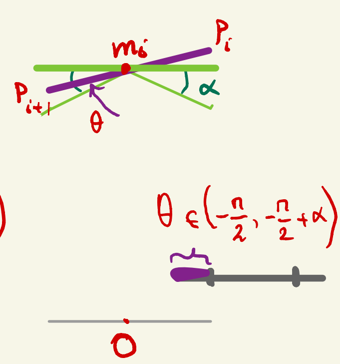
$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}+\alpha, \frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

Horizontaux P.



$\theta \in \left(\frac{\pi}{2}-\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$

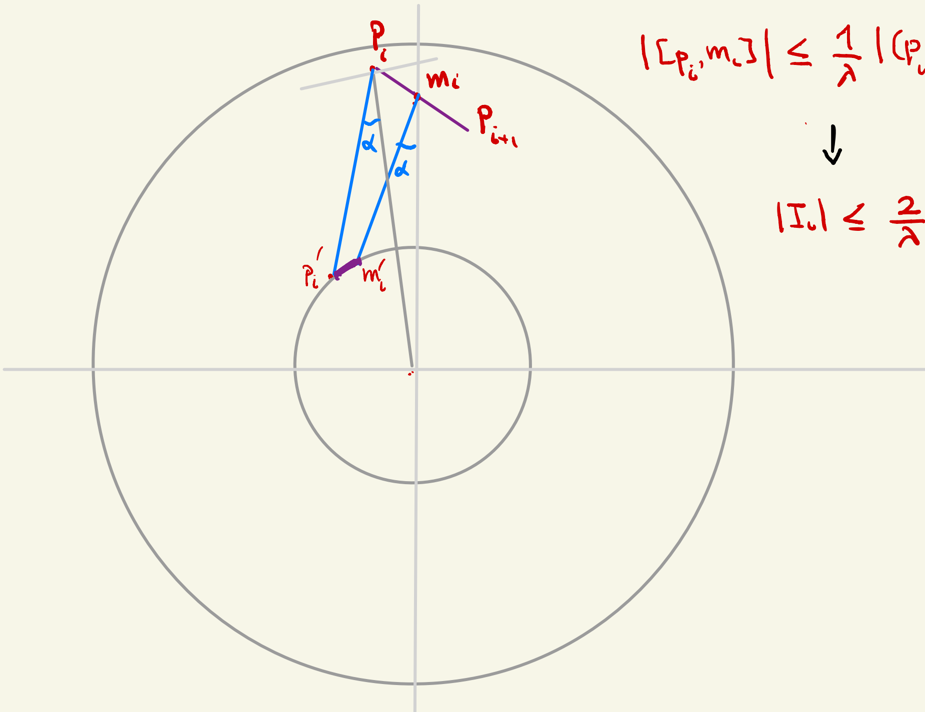
Horizontaux N.



$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

$$\boxed{\sum_{i\in \mathcal{V}} |I_i| \leq \frac{2}{\sin\alpha}(R-r)}$$

Contrôle de la longueur totale des segments verticaux



$$|[p_i, m_i]| \leq \frac{1}{\lambda}|(p_i', m_i')|$$

$$\Downarrow$$

$$|I_i| \leq \frac{2}{\lambda}|(p_i', m_i')|$$

Si $I_i = [p_i, p_{i+1}]$ et $I_j = [p_j, p_{j+1}]$ sont segments horizontaux positifs (HP), alors:

$$(p_i', m_i') \cap (p_j', m_{j+1}') = \emptyset$$

$$\boxed{\sum_{i\in HP} |I_i| \leq \frac{4\pi r}{\lambda}}$$

$$\sum_{i=0}^{N} |I_i| \leq \frac{2}{\sin\alpha}(R-r) + \frac{8\pi r}{\lambda} \leq \underbrace{\left(\frac{2}{\lambda} + \frac{8\pi}{1-\lambda}\right)}_{\min_{0<\lambda<1} \to 42}(R-r)$$

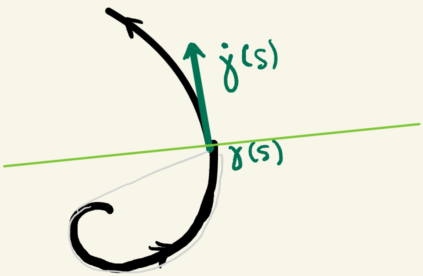
$$\boxed{\text{Longueur}(\gamma) \leq 42\,\|\gamma(0) - \gamma_\infty\|}$$

nombre pronique
nombre catalan

Manselli-Pucci, 1991

Γ-courbe $\quad \gamma : [0, L] \to \mathbb{R} \qquad \|\dot{\gamma}(t)\| = 1$

$$\langle \dot{\gamma}(s), \gamma(s) - \gamma(t) \rangle \geq 0, \quad \forall_{pp}\, s \in [0, L]$$
$$\forall\, t \in [0, s]$$



Pour tout $s \in [0,L]$ on dénote par $P(s)$ le périmètre de l'enveloppe convexe de la courbe $\gamma|_{[0,s]}$.

$$\dot{p}(s) \geq 1, \ \forall_{pp}\, s. \quad \Longrightarrow \quad P(L) \geq \ell(\gamma)$$

Γ-courbe	$\equiv$	auto-expansive, rectifiable, paramétrée par sa longueur

$$\left.\begin{array}{l} \gamma \ \text{auto-contractante} \\ \gamma \subset B(0, R) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \ell(\gamma) \leq 2\pi R$$

En dimension supérieure :

$K(s) = \mathrm{conv}\,(\gamma(t) : t \in [0,s])$

$W(s)$ = largeur moyenne de $K(s)$

$\dot{W}(s) \geq 1 \; , \; \forall_{pp}\, s \in [0, L]$

on peut adapter les principaux arguments pour traiter le cas d une courbe générale (possiblement discontinue)

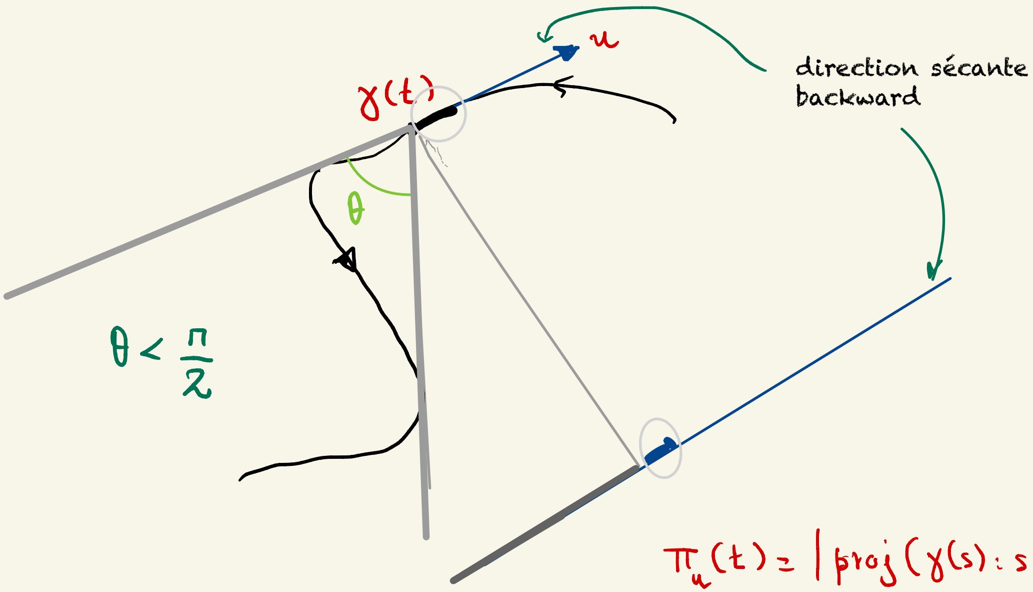
Daniilidis, Durant, Lemenant, David (J. Geom. Anal. 2015)

Si $X = (\mathbb{R}^d \, \|.\|_2)$, alors toute courbe auto-contractante est rectifiable.

Les courbes auto-contractantes continues sont rectifiables et leur longueur est contrôlée par leur diamètre.

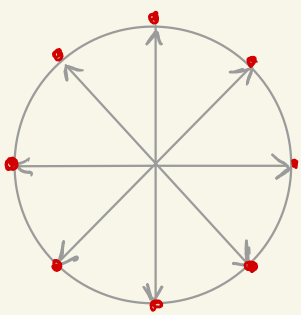
γ auto-contractante continue en $\mathbb{R}^d$ $\Rightarrow$ $\ell(\gamma) \leq \frac{1}{|S^{d-1}|}\,\mathrm{diam}(\gamma)$

Longinetti, Manselli, Venturi, Math. Nachr. 2015 idée principale :



$$\pi_u(t) = \left| \operatorname{proj}(\gamma(s) : s \geq t) \right|$$

$$\Lambda(t) = \sum_{u \in D} \pi_u(t), \quad D \subset S^{d-1}$$



Il faut pouvoir trouver des éléments de D dans l intérieur du cône polaire de tout cône d aperture $\pi/2$

L'argument peut s adapter aux variétés Riemanniennes

Daniilidis, Deville, Durand, Rifford, JMAA, 2018

Extensions :

- $(\mathbb{R}^d, \|.\|)$ norme quelconque

  (Stepanov – Teplitskaya, J. London Math. Soc., 2017)

- espaces CAT(0) (Ohta, J. Geom. Anal. 2018)

- espaces avec une faible courbure inférieure bornée

  (Lebedeva, Ohta, Zolotov, IMRS, 2020)

(Zolotov, 2018–2019)

Si un espace métrique admet une courbe auto-contractante non-rectifiable, alors il ne peut pas se plonger isométrique dans un espace normé de dimension finie.

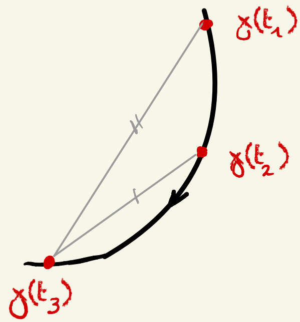
$X = (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\nabla f(x(t)) \\ x(0) = x_0, \quad t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

f convexe C^1

γ strictement auto-contractante,
si $t_1 < t_2 < t_3$ on a:

$$\|\gamma(t_1) - \gamma(t_3)\|_2 > \|\gamma(t_2) - \gamma(t_3)\|_2$$



Durand - Lemenant, Proc. Amer. Math. Soc., 2018

Toute courbe strictement auto-contractante de classe $C^{1,\alpha}$ (resp. C^3) est une orbite (resp. maximale) du gradient d'une fonction convexe C^1 (après reparamétrisation).

Preuve basée sur la version convexe du problème d extension Glaeser-Whitney.

Applications en optimisation.

$\{x_n\}_n$ est dite auto-contractante,

si pour $k < n < m$ on a

$$d(x_k, x_m) \geq d(x_n, x_m)$$

Le contrôle de la longueur s'applique également sur les courbes auto-contractantes discontinues (et a fortiori, sur les suites auto-contractantes)

Algorithmes de descente du premier ordre

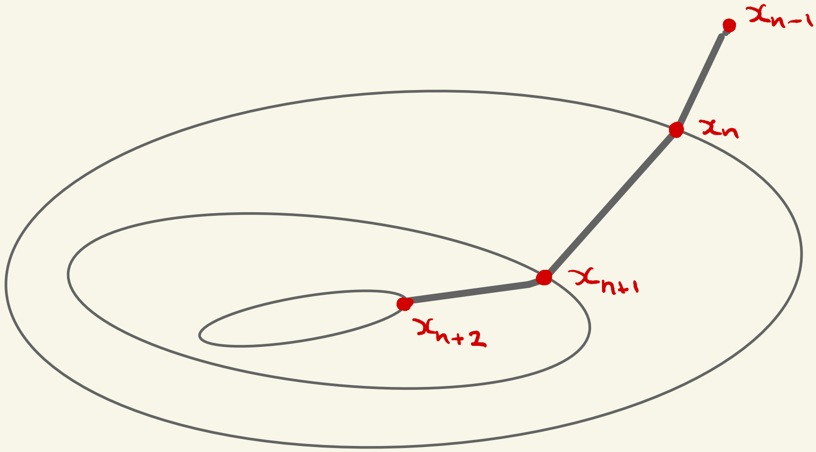
système continue

$$\dot{x}(t) = -\nabla f(x(t))$$

discrétisation

algorithme de la plus grande pente $\quad x_{n+1} = x_n - t_n \nabla f(x_n)$

algorithme proximal $\quad x_{n+1} = x_n - t_n \nabla f(x_{n+1})$



Si f est une fonction convexe, pour tout choix des paramètres $\{\lambda_n\}_n$ l'algorithme proximal

$$x_{n+1} = \mathrm{Prox}_{\lambda_n f}(x_n)$$

génère une suite auto-contractante.

$$\Downarrow$$

Pour toute fonction convexe f avec $\operatorname{argmin} f = \{0\}$ et toute suite $\{\lambda_n\}_n \in \ell^2 \setminus \ell^1$ on a :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\| \leq (cst) \cdot \|x_0\|.}$$

Si f est convexe et $C^{1,1}$ alors pour toute suite

$$\{t_n\}_n \subset (0, 1/L] \qquad L = \mathrm{Lip}(\nabla f)$$

l'algorithme

$$x_{n+1} = x_n + t_n \nabla f(x_n), \qquad n \geq 0$$

génère une suite auto-contractante

Gupta-Balakrishnan-Ramdas,
J. Machine Learning Res., 2021

$$\min_{x\in\mathbb{R}^d} \{ f(x) + g(x) \}$$

$$\begin{cases} f \text{ convexe } C^{1,1} \quad L = \mathrm{Lip}(\nabla f) \\ g \text{ convexe, sci} \end{cases}$$

$$T_a(x) = \mathrm{Prox}_{a,g}(x - a\nabla f(x)) \qquad a > 0$$

(Gradient-proximal)

Pour toute suite $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset (0, 1/L]$, la suite

$$x_{n+1} = T_{a_n}(x_n), \quad n \geq 1$$

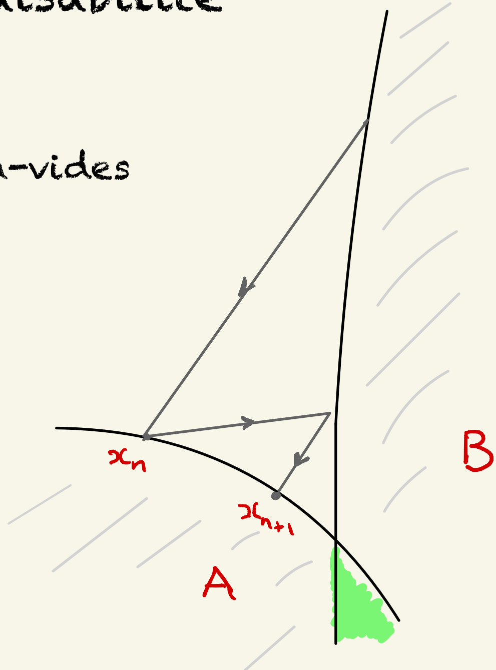
est auto-contractante.

Böhm-Daniilidis, JOCA 2021

Problème de faisabilité

A, B convexes fermés non-vides

Trouver $\bar{x} \in A \cap B$



Algorithme des projections alternées

$$x_{n+1} = (P_A \circ P_B)(x_n)$$

$$\boxed{\text{la suite } \{x_n\}_n \text{ est auto-contractante}}$$

$$f = \frac{1}{2} d_A^2 \qquad I - \nabla f = P_A.$$

$$g = i_B \qquad \operatorname{prox}_g = P_B$$

Généralisation métrique

Soit $\lambda \in [0,1)$

Définition. Une courbe $\gamma : [0,T_\infty) \to X$ est dite λ-courbe, si pour tous $t_1 \le t_2 \le t_3$ on a :

$$d(\gamma(t_1),\gamma(t_3)) \le d(\gamma(t_2),\gamma(t_3)) + \underbrace{\lambda\, d(\gamma(t_1),\gamma(t_2))}_{\text{relaxation}}$$

(Généralisation similaire pour des suites)

Toute courbe auto-contractante par rapport à une norme $\|.\|$ est une λ-courbe par rapport à la norme euclidienne.

Toute λ-courbe continue bornée est de longueur finie en $\mathbb{R}^2$

Toute λ-courbe continue bornée est de longueur finie en $\mathbb{R}^d$ si $\lambda < 1/d$

Daniilidis, Deville, Durand, JOTA, 2019

References :

Asymptotic behavior of self-contracted planar curves and gradient orbits of convex functions

J. Math. Pures Appl. 2010 (with O. Ley & S. Sabourau)

Rectifiability of self-contracted curves in the Euclidean space and applications
J. Geom. Anal. 2015 (with G. David, E. Durand, A. Lemenant)

Self-contracted curves in Riemann manifolds,
J. Math. Anal. Appl. 2018 (with R. Deville, E. Durand, L. Rifford)

Metric and geometric relaxations of self-contracted curves,
J. Optim. Theory Appl. 2019 (with R. Deville, E. Durand)

Ubiquitous algorithms in convex optimization generate self-contracted curves,
J. Convex Anal. 2021 (with A. Böhm)